Politechnika Wrocławska

Struktury danych i złożoność obliczeniowa
Wykład 7

Prof. dr hab. inż. Jan Magott

Problemy NP-zupełne

Transformacją wielomianową problemu π_2 do problemu π_1 ($\pi_2 \propto \pi_1$) jest funkcja $f: D_{\pi_2} \rightarrow D_{\pi_1}$ spełniająca warunki:

1. Dla każdej instancji $I_2 \epsilon D_{\pi_2}$ odpowiedź brzmi „tak”, wtedy i tylko wtedy, gdy dla instancji $f(I_2)$ odpowiedź również jest „tak”,
2. Czas obliczenia funkcji f przez DMT dla każdej instancji $I_2 \epsilon D_{\pi_2}$ jest ograniczony od góry przez wielomian od $N(I_2)$.

Własności transformacji wielomianowej

Lemat 1 Transformacja wielomianowa jest przechodnia, tzn. jeśli $\pi_2 \propto \pi_1$ i $\pi_3 \propto \pi_2$, to $\pi_3 \propto \pi_1$.

Lemat 2 Jeżeli $\pi_2 \propto \pi_1$ i $\pi_1 \epsilon NP$, to $\pi_2 \epsilon NP$.

Lemat 3 Jeżeli $\pi_2 \propto \pi_1$ i $\neg \pi_2 \epsilon NP$, to $\neg \pi_1 \epsilon NP$.

Wniosek Jeżeli $\pi_2 \propto \pi_1$, to problem π_1 jest co najmniej tak trudny jak π_2.

Problem decyzyjny π_1 jest nazywany ***NP-zupełnym***, jeśli:

1. $\pi_1 \epsilon NP$,
2. Dla każdego innego problemu decyzyjnego $\pi_2 \epsilon NP$ jest $\pi_2 \propto \pi_1$.

Zatem, jeśli istniałby algorytm wielomianowy do rozwiązywa- nia jakiegokolwiek problemu NP-zupełnego, to każdy problem z klasy NP (w tym również problemy NP-zupełne) mógłby być rozwiązany za pomocą algorytmu wielomianowego.

Z bezskuteczności poszukiwań algorytmu wielomianowego dla któregokolwiek problemu NP-zupełnego wynika, że prawie na pewno wszystkie problemy NP-zupełne można rozwiązać tylko przy użyciu algorytmów ponadwielomianowych.

Do udowodnienia NP-zupełności problemu decyzyjnego π wystarczy:

1. Dowieść, że $\pi \epsilon NP$,
2. Przetransformować wielomianowo dowolny znany problem NP-zupełny do problemu π.

W celu zbadania złożoności obliczeniowej danego problemu, staramy się znaleźć dla niego optymalny deterministyczny algorytm wielomianowy lub wykazać trudność tego problemu. Aby wykazać trudność, wystarczy udowodnić NP-zupełność.

Do klasy problemów NP-zupełnych należą najtrudniejsze problemy klasy NP.

Twierdzenie

Problem plecakowy jest NP-zupełny.

Cel:

Udowodnić NP-zupełność problemu plecakowego poprzez wielomianową transformację problemu podziału, który jest NP-zupełny, do plecakowego.

Problem podziału zbioru

Dane:

- $C = \{c_1, \dots, c_i, \dots, c_k\}$ - zbiór k elementów,
- Rozmiar $s(c_i) > 0$ elementu c_i, gdzie $s(c_i) \in N_+$, $N_+ = \{1,2,\dots\}$,
- $B \in N_+$,
- $\sum_{i=1}^{k} s(c_i) = 2B$.

Pytanie:

Czy istnieje podzbiór $C' \subset C$ taki, że

$$\sum_{c_i \in C'} s(c_i) = B \ ?$$

Problem plecakowy - wersja decyzyjna

Dane:

Skończony zbiór elementów $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Rozmiar $s(a_i) > 0$ i waga (wartość) $w(a_i) > 0$ elementu a_i.

Pojemność plecaka $b > 0$ i stała $y > 0$.

Zadanie:

Czy istnieje podzbiór $A' \subset A$ taki, że:

$$\sum_{a_i \in A'} s(a_i) \leq b$$

$$\sum_{a_i \in A'} w(a_i) \geq y \quad ?$$

Dowód, że problem plecakowy $\boldsymbol{\pi_1} \in \boldsymbol{NP}$

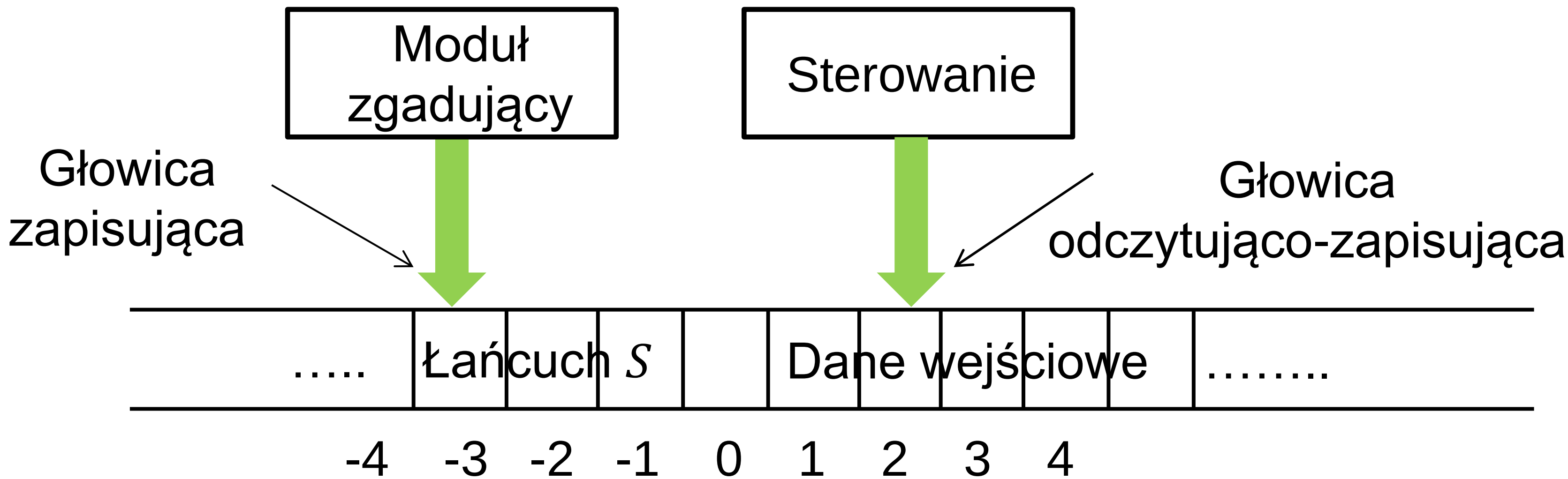
Aby rozwiązać instancję (konkretny problem) $I \in \pi_1$, NDMT musi wygenerować podzbiór $A' \subset A$ i sprawdzić w co najwyżej wielomianowym czasie, czy odpowiedź dla tego problemu brzmi „tak”. Należy sprawdzić nierówności

$$\sum_{a_i \in A'} s(a_i) \le b$$

$$\sum_{a_i \in A'} w(a_i) \ge y$$

Dowód, że problem plecakowy $\pi_1 \in NP$

NDMT dla Problemu plecakowego



Łańcuch S - liczba binarna, której i-ta pozycja wskazuje czy i-ty element zbioru A należy do wygenerowanego rozwiązania A'

Dane wejściowe

$$n\sqcup s(a_1)\sqcup \ldots \sqcup s(a_n)\sqcup$$
$$w(a_1)\sqcup\ldots\sqcup w(a_n)\sqcup b\sqcup y$$

Dowód, że problem plecakowy $\boldsymbol{\pi_1} \in \boldsymbol{NP}$

$$n \sqcup s(a_1) \sqcup \ldots \sqcup s(a_n) \sqcup w(a_1) \sqcup \ldots \sqcup w(a_n) \sqcup b \sqcup y$$

$$N(I) \approx \begin{array}{r} \lceil log_2 n \rceil + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\lceil log_2 s(a_i) \rceil + 1) \\ + \sum_{i=1}^{n} (\lceil log_2 w(a_i) \rceil + 1) + \lceil (log_2 b \rceil + 1 + \lceil (log_2 y \rceil \end{array}$$

$\lceil x \rceil$ - najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza niż x

$N(I) <$

$$(2n+3)(\lceil log_2 \max\{n, \left\{s(a_i) \colon \{\overline{1,n}\}\right\}, \{w(a_i) \colon \{\overline{1,n}\}\}, b, y\} \rceil + 1)$$

Dowód, że problem plecakowy $\boldsymbol{\pi_1} \in \boldsymbol{NP}$

Do sprawdzania nierówności: $\sum_{a_i \in A'} s(\,a_i) \leq b,\ \sum_{a_i \in A'} w(a_i) \geq y$ wystarcza $2|A'| - 2 \leq 2n$ operacji dodawania i 2 operacje porównania.

Operacje porównania i dodawania dwóch liczb b_1 i b_2 DTM może wykonać w czasie wielomianowym zależnym od $\lceil (log_2 b_1 \rceil$ i $\lceil (log_2 b_2 \rceil$.

Zatem złożoność weryfikacji odgadniętego rozwiązania jest ograniczona od góry przez wielomian $p(N(I))$ czyli $\boldsymbol{\pi_1} \in \boldsymbol{NP}$.

Dowód, że Problem podziału $\boldsymbol{\pi_2 \propto \pi_1}$

Problem podziału π_2 jest NP-zupełny

Dla instancji $I_2 \epsilon D_{\pi_2}$ konstruujemy instancję $I_1 \epsilon D_{\pi_1}$ taką, że:

$$n = k,$$

wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie $g(c_i) = a_i$,

$$s(a_i) = s(c_i) \text{ dla } i \epsilon \{\overline{1, n}\},$$

$$w(a_i) = s(c_i) \text{ dla } i \epsilon \{\overline{1, n}\},$$

$$b = y = B.$$

Transformacją wielomianową problemu $\boldsymbol{\pi_2}$ do problemu $\boldsymbol{\pi_1}$ ($\pi_2 \propto \pi_1$) jest funkcja $f: D_{\pi_2} \rightarrow D_{\pi_1}$ spełniająca warunki:

1. Dla każdej instancji $I_2 \epsilon D_{\pi_2}$ odpowiedź brzmi „tak”, wtedy i tylko wtedy, gdy dla instancji $f(I_2)$ odpowiedź również jest „tak”,

2. Czas obliczenia funkcji f przez DMT dla każdej instancji $I_2 \epsilon D_{\pi_2}$ jest ograniczony od góry przez wielomian od $N(I_2)$.

Dowód, że Problem podziału $\boldsymbol{\pi_2 \propto \pi_1}$

1. Dowód, że dla każdej instancji $I_2 \epsilon D_{\pi_2}$ odpowiedź brzmi „tak”, wtedy i tylko wtedy, gdy dla instancji $I_1 \in \pi_1$ odpowiedź również jest „tak”.

Niech odpowiedź dla $I_1 \in \pi_1$ brzmi „tak”. Zatem istnieje $A' \subset A$ taki, że: $\sum_{a_i \in A'} s(a_i) \leq b,\ \sum_{a_i \in A'} w(a_i) \geq y$. Ponieważ $s(a_i) = w(a_i)$=$s(c_i)$ dla $i \epsilon \{\overline{1, n}\}$ oraz $b = y = B$, a więc dla zbioru

$C' = \{c_i : c_i = g^{-1}(a_i) \wedge a_i \epsilon A'\}$ prawdziwe jest $\sum_{c_i \in C'} s(c_i) = B$.

Zatem dla instancji $I_2 \epsilon D_{\pi_2}$ odpowiedź brzmi „tak”.

Dowód, że Problem podziału $\boldsymbol{\pi_2 \propto \pi_1}$

1. Dowód, że dla każdej instancji $I_2 \epsilon D_{\pi_2}$ odpowiedź brzmi „tak”, wtedy i tylko wtedy, gdy dla instancji $I_1 \in \pi_1$ odpowiedź również jest „tak”.

Niech odpowiedź dla $I_2 \epsilon D_{\pi_2}$ brzmi „tak”. Zatem istnieje $C' \subset C$ taki, że: $\sum_{c_i \in C'} s(c_i) = B$. Ponieważ

$s(a_i) = w(a_i)$=$s(c_i)$ dla $i \epsilon \{\overline{1,n}\}$ oraz $b = y = B$, a więc dla zbioru $A' = \{a_i : a_i = s(c_i) \wedge c_i \epsilon C'\}$ prawdziwe jest

$$\sum_{a_i \in A'} s(a_i) = \sum_{a_i \in A'} w(a_i) = b = y$$

Zatem dla instancji $I_1 \in \pi_1$ odpowiedź brzmi „tak”.

Dowód, że Problem podziału $\boldsymbol{\pi_2 \propto \pi_1}$

2. Czas obliczenia funkcji f przez DMT dla każdej instancji $I_2 \epsilon D_{\pi_2}$ jest ograniczony od góry przez wielomian od $N(I_2)$.

Czas konstrukcji danych $I_1 \epsilon D_{\pi_1}$ jest ograniczony od góry przez wielomian od rozmiaru $I_2 \epsilon D_{\pi_2}$, ponieważ DMT musi przepisać $2n+3$ liczb.

Wnioski

1. Klasa problemów NP-zupełnych zawiera **problemy równoważne wielomianowo**, tzn. jeśli π_1 jest NP-zupełny i π_2 jest NP-zupełny, to $\pi_2 \propto \pi_1$ i $\pi_1 \propto \pi_2$.

2. Klasa problemów NP-zupełnych zawarta jest w klasie NP.

3. Jeśli dla pewnego problemu NP-zupełnego istnieje wielomianowy algorytm rozwiązania, to wszystkie problemy NP-zupełne są rozwiązywalne w czasie wielomianowym.

4. Klasa problemów NP-zupełnych zawiera najtrudniejsze problemy z klasy NP.

Podsumowanie

$\boldsymbol{P}$ – klasa problemów rozwiązywalnych w czasie wielomianowym.

$\boldsymbol{NP - zupełne}$ – klasa problemów prawie na pewno nie rozwiązywalnych w czasie wielomianowym.

Problemy otwarte to takie, dla których nie znaleziono algorytmu wielomianowego rozwiązania ani nie wykazano NP-zupełności.

Do udowodnienia NP-zupełności problemu decyzyjnego π wystarczy:

1. Dowieść, że $\pi \epsilon NP$,
2. Przetransformować wielomianowo dowolny znany problem NP-zupełny do problemu π.

W celu zbadania złożoności obliczeniowej danego problemu, staramy się znaleźć dla niego optymalny deterministyczny algorytm wielomianowy lub wykazać trudność tego problemu. Aby wykazać trudność, wystarczy udowodnić NP-zupełność.

Do klasy problemów NP-zupełnych należą najtrudniejsze problemy klasy NP.

Problemami NP-zupełnymi są:

- Problem podziału,
- Problem komiwojażera,
- Problem cyklu Hamiltona.

W celu wykazania NP-zupełności problemu π_1 należy:

1. Pokazać, że $\pi_1 \in NP$,
2. Wybrać odpowiedni NP-zupełny problem π_2,
3. Skonstruować transformację $f: D_{\pi_2} \to D_{\pi_1}$,
4. Pokazać, że f jest obliczana w czasie wielomianowym,
5. Pokazać, że $\boldsymbol{\pi_2} \Rightarrow \boldsymbol{\pi_1}$,
6. Pokazać, że $\boldsymbol{\pi_1} \Rightarrow \boldsymbol{\pi_2}$ lub $\neg\boldsymbol{\pi_2} \Rightarrow \neg\boldsymbol{\pi_1}$.

Zwykle najtrudniejsze są punkty 2. i 6.

Zasadnicze techniki dowodzenia NP-zupełności problemów decyzyjnych:

- Ograniczanie,
- Lokalna zamiana,
- Projektowanie części składowych.

Którą z technik zastosowano dowodząc NP-zupełności Problemu plecakowego poprzez przetransformowanie do niego Problemu podziału?

Problem cyklu Hamiltona

Dane:

Graf nieskierowany $G =< V, E >$, $n = |V|$

Pytanie:

Czy G zawiera cykl Hamiltona, tzn. czy istnieje takie uporządkowanie wierzchołków grafu $< v_{i[1]}, v_{i[2]},\ldots, v_{i[n]} >$, że:

$$\{v_{i[j]}, v_{i[j+1]}\} \in E \text{ dla } j \epsilon \{\overline{1, n-1}\}$$

$$oraz$$

$$\{v_{i[n]}, v_{i[1]}\} \in E\ ?$$

Problem ścieżki Hamiltona

Dane:

Graf nieskierowany $G =< V, E >,\ n = |V|$

Pytanie:

Czy G zawiera ścieżkę Hamiltona, tzn. czy istnieje takie uporządkowanie wierzchołków grafu $< v_{i[1]}, v_{i[2]},\dots, v_{i[n]} >$, że $\{v_{i[j]}, v_{i[j+1]}\} \in E$ dla $j \epsilon \{\overline{1, n-1}\}$?

Twierdzenie

Problemy cyklu Hamiltona i ścieżki Hamiltona są NP-zupełne.

Problem najdłuższej ścieżki

Graf nieskierowany $G =< V, E >$, liczba naturalna $K \leq |V|$.

Pytanie:

Czy G zawiera ścieżkę prostą (ścieżkę przechodząca przez każdy z jej wierzchołków dokładnie jeden raz) zawierającą K lub więcej krawędzi?

Zasadnicze techniki dowodzenia NP-zupełności problemów decyzyjnych:

- **Ograniczanie**,
- Lokalna zamiana,
- Projektowanie części składowych.

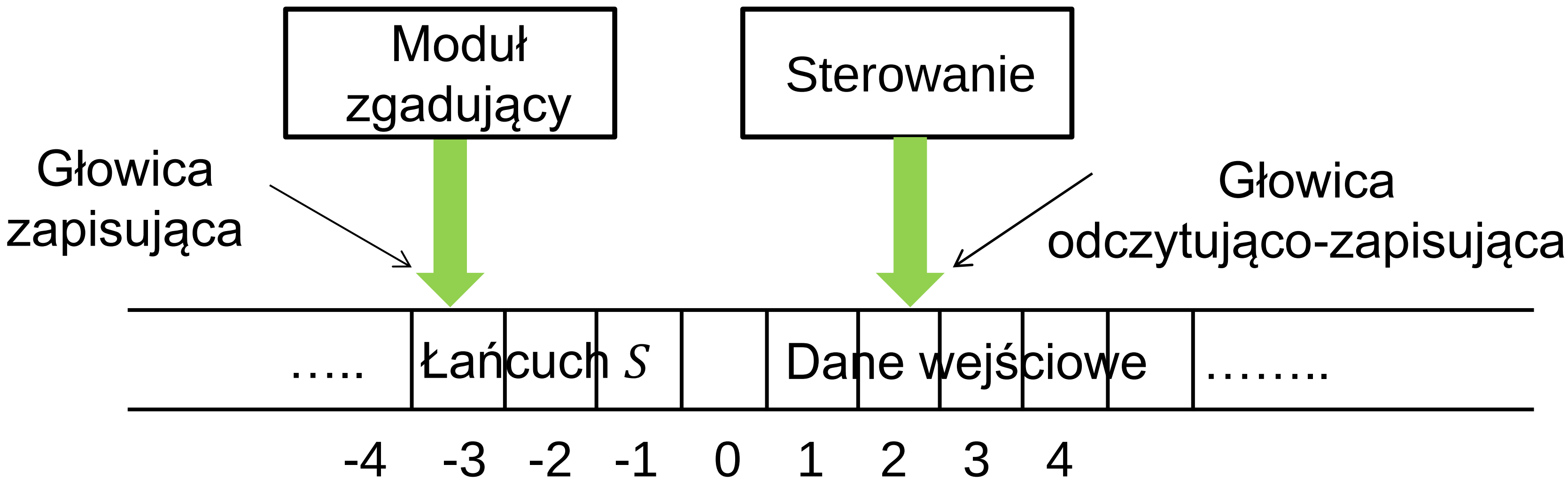
Twierdzenie

Problem najdłuższej ścieżki jest NP-zupełny.

Dowód wykonany techniką ograniczania.

Jako znany problem NP-zupełny przyjmiemy Problem ścieżki Hamiltona.

NDMT dla *Problemu najdłuższej ścieżki*



Łańcuch S - ciąg K+1 indeksów wierzchołków, którego i-ta pozycja wskazuje na i-ty wierzchołek wygenerowanej sekwencji.

Dane wejściowe

$|V| \sqcup v_0, v_j \sqcup v_k, v_l \sqcup \ldots \sqcup v_p, v_r \sqcup$

Twierdzenie

Problem najdłuższej ścieżki π_1 jest NP-zupełny.

Dowód, że $\boldsymbol{\pi_1 \epsilon NP}$

Podczas rozwiązywania problemu π_1, moduł zgadujący NDMT generuje sekwencję $(K+1)$ wierzchołków, tzn. K krawędzi.

W jaki sposób? Jaka jest złożoność obliczeniowa?

Deterministyczna część NDMT sprawdza czy dla każdych dwu kolejnych wierzchołków $v_{i[j]}, v_{i[j+1]}$ jest $\{v_{i[j]}, v_{i[j+1]}\} \in E$ oraz czy wierzchołki powtarzają się.

Ponieważ te czynności można wykonać w czasie wielomianowym, a więc $\boldsymbol{\pi_1 \epsilon NP}$.

Twierdzenie

Problem najdłuższej ścieżki jest NP-zupełny.

Dowód, że $\boldsymbol{\pi_2 \propto \pi_1}$

π_1 - Problem najdłuższej ścieżki,

π_2 - Problem ścieżki Hamiltona.

Problem ścieżki Hamiltona

Dane:

Graf nieskierowany $G =< V, E >$, $n = |V|$

Pytanie:

Czy G zawiera ścieżkę Hamiltona, tzn. czy istnieje takie uporządkowanie wierzchołków grafu $< v_{i[1]}, v_{i[2]}, \ldots, v_{i[n]} >$, że $\{v_{i[j]}, v_{i[j+1]}\} \in E$ dla $j \epsilon \{\overline{1, n-1}\}$?

Problem najdłuższej ścieżki

Graf nieskierowany $G =< V, E >$, liczba naturalna $K \leq |V|$.

Pytanie:

Czy G zawiera ścieżkę prostą (ścieżkę przechodząca przez każdy z jej wierzchołków dokładnie jeden raz) zawierającą K lub więcej krawędzi?

Czy jeden z powyższych problemów jest ogólniejszy od drugiego?

Jak dobrać K ?

Twierdzenie

Problem najdłuższej ścieżki jest NP-zupełny.

Dowód, że $\boldsymbol{\pi_2 \propto \pi_1}$

π_1 - Problem najdłuższej ścieżki,

π_2 - Problem ścieżki Hamiltona.

W celu wykazania powyższego należy π_1 ograniczyć tylko do tych instancji $I_1 \in D_{\pi_1}$, takich, że $K = |V| - 1$. Tak ograniczony π_1 jest problemem π_2.

Graf pełny

W grafie pełnym każda para wierzchołków jest połączona.

Izomorfizm grafów

Dane:

Grafy $G_1 =< V_1, E_1 >$, $G_2 =< V_2, E_2 >$.

Pytanie:

Czy istnieje funkcja jeden na jeden $f: V_1 \to V_2$ taka, że $\{u, v\} \epsilon E_1$ wtedy i tylko wtedy gdy $\{f(u), f(v)\} \epsilon E_2$?

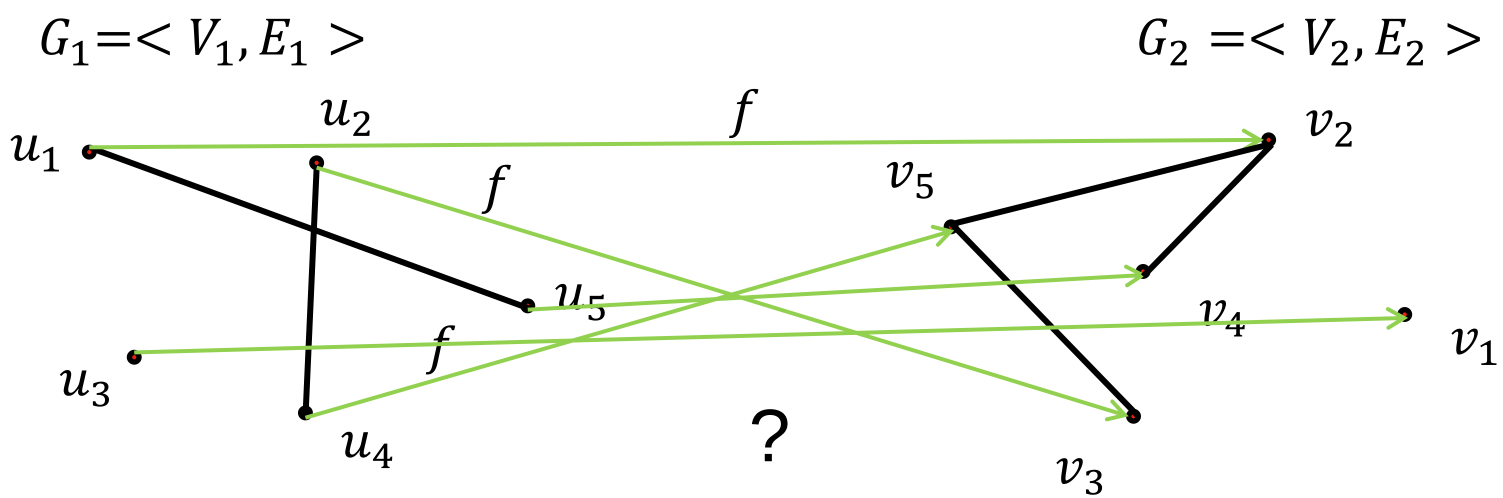
Izomorfizm grafów

Dane:

Grafy $G_1 =< V_1, E_1 >$, $G_2 =< V_2, E_2 >$.

Pytanie:

Czy istnieje funkcja jeden na jeden $f: V_1 \rightarrow V_2$ taka, że $\{u, v\} \epsilon E_1$ wtedy i tylko wtedy gdy $\{f(u), f(v)\} \epsilon E_2$?



Testy izomorfizmu grafów

?

Testy izomorfizmu grafów

- Liczba wierzchołków
- Liczba krawędzi
- Stopnie wierzchołków

Niech grafy $G_1 =< V_1, E_1 >$, $G_2 =< V_2, E_2 >$
będą takie, że $|V_1| = |V_2| = n$.

Ile jest funkcji jeden na jeden $f: V_1 \to V_2$?

Niech grafy $G_1 =< V_1, E_1 >$, $G_2 =< V_2, E_2 >$ będą takie, że $|V_1|= |V_2| = n$.

Funkcji jeden na jeden $f: V_1 \to V_2$ jest $n!$.

Problem kliki

Dane:

Graf nieskierowany $G =< V, E >$, liczba naturalna $k \leq |V|$.

Pytanie:

Czy graf zawiera klikę o rozmiarze k lub większym, tzn. podgraf pełny zawierający $|V'| \geq k$ wierzchołków.

Problem największego wspólnego podgrafu

Dane:

Grafy nieskierowane $G_1 =< V_1, E_1 >$ i $G_2 =< V_2, E_2 >$, liczba naturalna K.

Pytanie:

Czy istnieją podzbiory $E_1{}' \subset E_1$ i $E_2{}' \subset E_2$ takie, że $|E_1'| = |\, E_2'| \geq K$ i podgrafy $G_1{}' =< V_1, E_1{}' >$ i $G_2{}' =< V_2, E_2{}' >$ są izomorficzne?

Problem największego wspólnego podgrafu

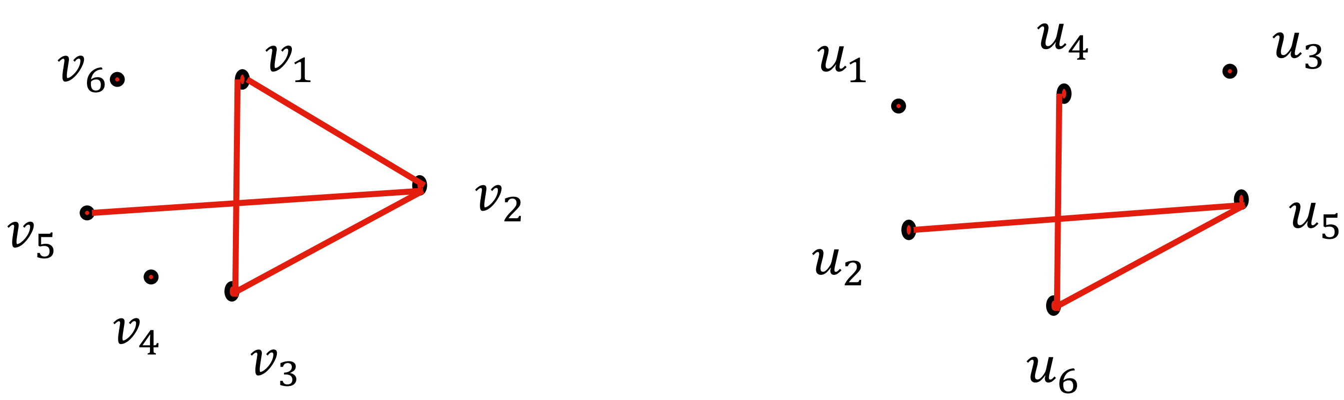
Dane:

Grafy nieskierowane $G_1 =< V_1, E_1 >$ i $G_2 =< V_2, E_2 >$, liczba naturalna K.

Pytanie:

Czy istnieją podzbiory $E_1{}' \subset E_1$ i $E_2{}' \subset E_2$ takie, że $|E_1'| = |\, E_2'| \geq K$

i podgrafy $G_1{}' =< V_1, E_1{}' >$ i $G_2{}' =< V_2, E_2{}' >$ są izomorficzne?



Kryteria kosztów operacji elementarnych

(zapisania, dodawania, odejmowania, porównania dwu liczb, itp.)

Logarytmiczne kryterium kosztów

Czas wykonania elementarnej operacji zależy liniowo od długości łańcucha danych kodujących liczby, a zatem od logarytmów liczb.

Analiza teoretyczna z użyciem DMT prowadzona jest przy tym kryterium.

Jednorodne kryterium kosztów

Czas wykonania elementarnej operacji jest jednostkowy.

Analiza praktyczna często oparta jest na tym kryterium.

Twierdzenie

Problem największego wspólnego podgrafu π_1 jest NP-zupełny.

Dowód, że $\boldsymbol{\pi_1 \epsilon NP}$

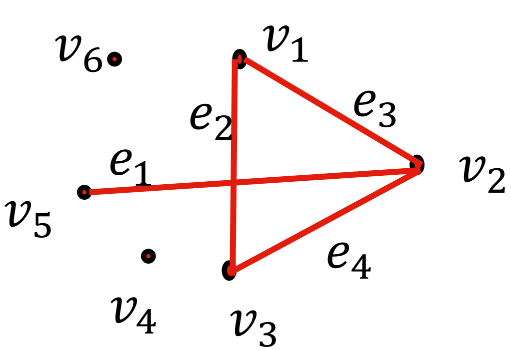
Dowód, że *Problem największego wspólnego podgrafu* $\pi_1 \epsilon NP$

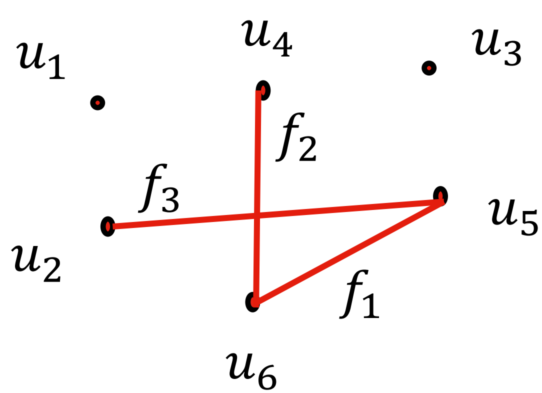
Dane:

Grafy nieskierowane $G_1 =< V_1, E_1 >$ i $G_2 =< V_2, E_2 >$, liczba naturalna K.

Pytanie:

Czy istnieją podzbiory $E_1{}' \subset E_1$ i $E_2{}' \subset E_2$ takie, że $|E_1'| = |\, E_2'| \geq K$ i podgrafy $G_1{}' =< V_1, E_1{}' >$ i $G_2{}' =< V_2, E_2{}' >$ są izomorficzne?

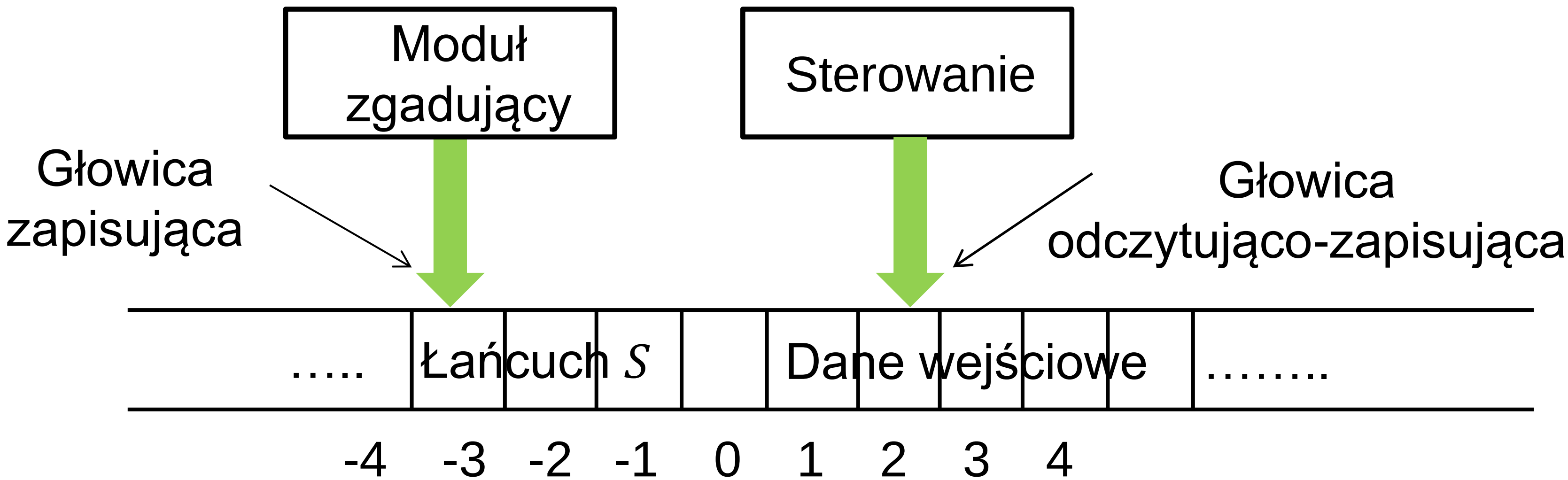




$v_2\ v_5,\quad v_1\ v_3,\ v_2\ v_1,$ $\qquad$ $e_1,\ e_2, e_3$

$u_6\ u_4,\ u_5\ u_2,\ u_6\ u_5,$ $\qquad$ $f_2,\ f_3,\ f_1$

NDMT dla *Problemu najdłuższej ścieżki*



Łańcuch S

Pary reprezentujące odwzorowanie

$g: V_1 \to V_2$

$\sqcup\ v_0, u_j \sqcup v_k, u_l \sqcup \ldots \sqcup v_p, u_r \sqcup$

Dane wejściowe

Liczby wierzchołków obu grafów z łukami

$|V_1| \sqcup v_0, v_j \sqcup v_k, v_l \sqcup \ldots \sqcup v_p, v_r \sqcup |V_2| \sqcup u_0, v_k \sqcup v_k, v_m \sqcup \ldots \sqcup v_r, v_p \sqcup$

Wyznaczanie liczby krawędzi w podgrafach izomorficznych

Dla każdej krawędzi $\{v_k, v_l\}$ w grafie G_1 wykonać

wyznacz zbiór $\{g(v_k), g(v_l)\}$;

sprawdź czy $\{g(v_k), g(v_l)\}$ jest krawędzią w G_2;

jeśli $\{g(v_k), g(v_l)\}$ jest krawędzią w G_2, to liczbę krawędzi w podgrafach izomorficznych zwiększ o 1

Dowód, że *Problem największego wspólnego podgrafu* $\boldsymbol{\pi_1 \epsilon NP}$

NDMT musi sprawdzić, czy:

Czy istnieją podzbiory $E_1{}' \subset E_1$ i $E_2{}' \subset E_2$ takie, że $|E_1'| = |\, E_2'| \geq K$ i podgrafy $G_1{}' =< V_1, E_1{}' >$ i $G_2{}' =< V_2, E_2{}' >$ są izomorficzne?

Generacja jednego rozwiązania i sprawdzenie warunków mogą być wykonane w czasie ograniczonym przez wielomian od rozmiaru problemu.

Zatem $\boldsymbol{\pi_1 \epsilon NP}$.

Problem kliki

Dane:

Graf nieskierowany $G =< V, E >$, liczba naturalna $k \leq |V|$.

Pytanie:

Czy graf zawiera klikę o rozmiarze k lub większym, tzn. podgraf pełny zawierający $|V'| \geq k$ wierzchołków.

Problem największego wspólnego podgrafu

Dane:

Grafy nieskierowane $G_1 =< V_1, E_1 >$ i $G_2 =< V_2, E_2 >$, liczba naturalna K.

Pytanie:

Czy istnieją podzbiory $E_1{}' \subset E_1$ i $E_2{}' \subset E_2$ takie, że $|E_1'| = |\, E_2'| \geq K$

i podgrafy $G_1{}' =< V_1, E_1{}' >$ i $G_2{}' =< V_2, E_2{}' >$ są izomorficzne?

Dowód, że $\boldsymbol{\pi_2 \propto \pi_1}$

Problem kliki $\boldsymbol{\pi_2}$

Problem największego wspólnego podgrafu $\boldsymbol{\pi_1}$

Punktem wyjścia jest twierdzenie

Problem kliki jest NP-zupełny.

Niech w Problemie kliki dane będzie $k \leq |V|$.

W Problemie największego wspólnego podgrafu, jako G_2 przyjmijmy graf zawierający graf pełny o k wierzchołkach. Jego pozostałe $|V_2| - k$ wierzchołki mają stopnie równe 0. W G_2 jest krawędzi w liczbie $\sum_{i=k}^{2}(i-1) = (k-1) \cdot k/2$

Dowód, że $\boldsymbol{\pi_2 \propto \pi_1}$

Problem kliki $\boldsymbol{\pi_2}$

Problem największego wspólnego podgrafu $\boldsymbol{\pi_1}$

Ograniczamy $\boldsymbol{\pi_1}$ do postaci, gdy graf G_2 jest grafem jak poprzednio określony, a $K = |E_2| = (k-1) \cdot k/2$. Tak zdefiniowany ***Problem największego podgrafu*** polega na szukaniu kliki o k wierzchołkach w grafie G_1. Zatem tak ograniczony ***Problem największego wspólnego podgrafu*** daje rozwiązanie dla ***Problemu kliki***.