

# Algorytmy mrówkowe (*ang. Ant Colony Optimization*)

1. Wprowadzenie do ACO
  - a) mrówki naturalne
  - b) mrówki sztuczne
  - c) literatura (kilka pozycji)
2. ACO i TSP

## 1. Wprowadzenie do ACO

### a) mrówki naturalne

- ślepe,
- znikome mózgi (faktycznie zwoje: podprzełykowy i nadprzełykowy), który jest zdolny do uczenia się i zapamiętywania,
- wyśmienity zmysł węchu,
- wykorzystują zjawisko *stygmergii*, czyli pośredniej komunikacji poprzez wywoływanie zmian w środowisku i ich odczytywanie.

### Pytanie 1. Jak to robią?

## 1. Wprowadzenie do ACO

### a) mrówki naturalne

- Przemierzając się pozostawiają tzw. *ślad feromonowy*.
- Feromony stale parują, co pozwala na komunikację (*stygmergia*) pomiędzy osobnikami.
- Jednym z elementów tej komunikacji jest (*stadne*) odkrywanie najkrótszych dróg do pożywienia.
- Mrówki podejmują decyzje o wyborze drogi na podstawie *intensywności* zapachu.

### Pytanie 2. Skąd to wiadomo?

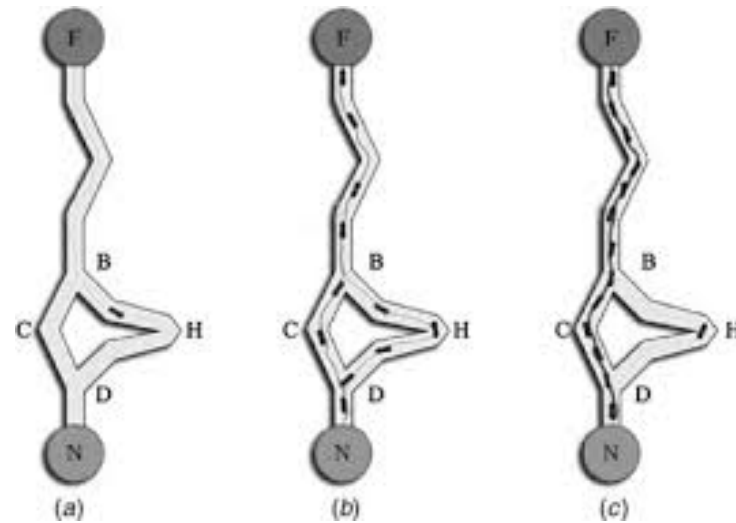
# 1. Wprowadzenie do ACO

## a) mrówki naturalne

W 1989 roku Deneubourg odkrył i wykazał, że mrówki potrafią odszukać najkrótszą drogę do pożywienia.

Posiadają tzw. inteligencję zbiorową (stadną), która oparta jest na wykorzystaniu wspomnianego systemu komunikacji.

Deneubourg wykonał eksperyment, w którym połączył mrowisko ze źródłem pożywienia dwoma drogami (mostami). Drogi rozdzielone były pod kątem  $30^\circ$ , aby wykluczyć wybór którejs z dróg.



## 1. Wprowadzenie do ACO

### a) mrówki naturalne

Deneubourg wytłumaczył takie zachowanie za pomocą prostego modelu probabilistycznego.

Każda mrówka podejmując decyzję o wyborze trasy dokonuje tego z prawdopodobieństwem zależnym od ilości feromonu znajdującego się na trasach. Podobna sytuacja występuje w przypadku zablokowania trasy przez przeszkodę.

1. Mrówki podążają po wyznaczonej trasie (po najsilniejszym śladzie feromonowym).
2. Ustawienie przeszkody powoduje powstanie dwu tras.
3. Mrówki wybierają (sprawdzają) obie trasy.
4. Idące trasą krótszą szybciej nasycają ją feromonami, czyli wskazują pozostałym krótszą drogę.
5. Z czasem ślad feromonowy na dłuższej trasie zanika (wyparowuje).
6. Pozostaje trasa optymalna.

**Pytanie 3.** Jaki jest zatem sposób (algorytm) działania mrówek?

## 1. Wprowadzenie do ACO

### a) mrówki naturalne

- Mrówki losowo badają obszar (drogi) wokół mrowiska.
- Odkrywcy najkrótszych tras do pożywienia wracają najszybciej i wzmacniają ślad feromonowy na trasie.
- Trasy dłuższe lub „ślepe” zanikają

**Pytanie 4.** Co wynika z tego dla poszukiwania rozwiązań w przestrzeni i rozwiązywania problemów optymalizacyjnych?

## 1. Wprowadzenie do ACO

### b) mrówki sztuczne

- Mrówki odwiedzają połączone ze sobą punkty w przestrzeni - wierzchołki grafu.
- Aktualizują ślad feromonowy w dowolnym momencie; również po znalezieniu rozwiązania.
- Mogą określać (rodzajem feromonu) jakość trasy.
- Mogą rozpoznawać różnicę w jakości dróg w danym miejscu - węzle grafu.
- Mogą podejmować decyzje - w oparciu o pewne kryterium - co do wyboru tras o identycznym śladzie feromonowym (jego sile).
- Mogą posiadać pamięć węzłów odwiedzonych - *lista tabu*.

**Pytanie 5.** Czy ktoś wykorzystał już to odkrycie do stworzenia czegoś w celu rozwiązywania problemów optymalizacyjnych?

## 1. Wprowadzenie do ACO

### c) literatura

Pierwszym badaczem, twórcą i popularyzatorem algorytmów optymalizacyjnych opartych o fenomen zbiorowej inteligencji mrówek, był *Marco Dorigo* [patrz również termin *robotyka ławicy*].

1. M. Dorigo, T. Stützle, *Ant Colony Optimization*. Bradford Company, Scituate. MA, USA, 2004
2. M. Dorigo, *Ant Colony System: A Cooperative Learning Approach to the Traveling Salesman Problem*. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1 (1): 53–66
3. A. Coloni, M. Dorigo, Vittorio Maniezzo - *Distributed optimization by ant colonies* *European Conference on Artificial Life*, strony 134–142, 1991.



## 2. ACO i TSP (1)

### Algorytm mrówkowy dla TSP

dopóki kryterium zatrzymania nie wystąpiło powtarzaj

1. wylosuj dla każdej mrówki losowe miasto początkowe
2. na podstawie lokalnej ilości feromonu i pewnej heurystyki wybierz kolejną krawędź
3. po osiągnięciu celu uaktualnij ilość feromonu wg określonych (dla danego algorytmu) zasad

## 2. ACO i TSP (2)

TSP, czyli problem znalezienia minimalnego cyklu Hamiltona w pełnym, ważonym grafie  $G = (V, E)$ , takiego że po odwiedzeniu wszystkich  $n$  miast (wierzchołków grafu  $G$ ) znalezione zostaje minimum funkcji:

$$f(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} d_{\pi(i)\pi(i+1)} + d_{\pi(n)\pi(1)}$$

gdzie:  $\pi$  jest permutacją węzłów o indeksach  $\{1, 2, \dots, n\}$

## 2. ACO i TSP (3)(założenia)

- $m$  mrówek

## 2. ACO i TSP (3)(założenia)

- $m$  mrówek
- dla każdej mrówki losowany jest wierzchołek (miasto) startowe

## 2. ACO i TSP (3)(założenia)

- $m$  mrówek
- dla każdej mrówki losowany jest wierzchołek (miasto) startowe
- mrówki poruszają się (od wierzchołka startowego) po krawędziach  $E(i, j)$  - z miasta  $i$  do miasta  $j$ .

## 2. ACO i TSP (3)(założenia)

- $m$  mrówek
- dla każdej mrówki losowany jest wierzchołek (miasto) startowe
- mrówki poruszają się (od wierzchołka startowego) po krawędziach  $E(i, j)$  - z miasta  $i$  do miasta  $j$ .
- odległość pomiędzy wierzchołkami  $i$  i  $j$  określana jest odległością *euklidesową*

## 2. ACO i TSP (3)(założenia)

- $m$  mrówek
- dla każdej mrówki losowany jest wierzchołek (miasto) startowe
- mrówki poruszają się (od wierzchołka startowego) po krawędziach  $E(i, j)$  - z miasta  $i$  do miasta  $j$ .
- odległość pomiędzy wierzchołkami  $i$  i  $j$  określana jest odległością *euklidesową*

$$\delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

## 2. ACO i TSP (3)(założenia)

- $m$  mrówek
- dla każdej mrówki losowany jest wierzchołek (miasto) startowe
- mrówki poruszają się (od wierzchołka startowego) po krawędziach  $E(i, j)$  - z miasta  $i$  do miasta  $j$ .
- odległość pomiędzy wierzchołkami  $i$  i  $j$  określana jest odległością *euklidesową*

$$\delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

- zawartość feromonu na krawędzi  $E(i, j)$  w chwili  $t$  oznaczana jest przez  $\tau_{ij}(t)$



## 2. ACO i TSP (3)(założenia)

- $m$  mrówek
- dla każdej mrówki losowany jest wierzchołek (miasto) startowe
- mrówki poruszają się (od wierzchołka startowego) po krawędziach  $E(i, j)$  - z miasta  $i$  do miasta  $j$ .
- odległość pomiędzy wierzchołkami  $i$  i  $j$  określana jest odległością *euklidesową*

$$\delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

- zawartość feromonu na krawędzi  $E(i, j)$  w chwili  $t$  oznaczana jest przez  $\tau_{ij}(t)$
- ilość feromonu w chwili startowej  $t = 0$  powinna być stosunkowo mała i na każdej krawędzi jednakowa

**Pytanie 7.** Jak zmienia się ilość feromonu w czasie? skoro poziom feromonu jest kluczowy w ustalaniu marszruty

## 2. ACO i TSP (4)(zmiana stężenia feromonu)

Stężenie feromonu zmieniane jest (aktualizowane) w każdym kroku wg poniższego wzoru:

$$\tau_{ij}(t+1) = \rho \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t, t+1),$$

gdzie:

$\rho$  jest współczynnikiem z przedziału  $< 0, 1 >$ , określającym ilość wyparowującego feromonu w jednostce czasu (0 - wyparowuje cały, 1 - wyparowuje nic).

$$\Delta\tau_{ij}(t, t+1) = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k(t, t+1),$$

$\Delta\tau_{ij}^k(t, t+1)$  jest ilością feromonu odkładaną na jednostkę długości krawędzi  $(i, j)$  rozkładanego przez  $k$ -tą mrówkę w jednostce czasu.

**Pytanie 8.** Jak spełnić wymaganie TSP na odwiedzanie każdego miasta jednokrotnie?

## 2. ACO i TSP (5)(*lista tabu*)

Tworzy się, dla każdej z  $m$  mrówek, swoistą *listę tabu*, w której zapamiętywane są odwiedzone wierzchołki (miasta).

Po zamknięciu przez  $k$ -tą mrówkę cyklu (najczęściej przed kolejną iteracją), lista jest czyszczona.

**UWAGA!** Lista czyszczona jest zawsze, jednak nie zawsze przed kolejną iteracją.

**Pytanie 9.** W jaki sposób następuje wybór miasta  $j$  (kolejnego po  $i$ ) na drodze  $k$ -tej (każdej) mrówki?

2. ACO i TSP (6)(wybór miasta)

Wybór następuje zgodnie z określonym prawdopodobieństwem.

**Pytanie 10.** Dlaczego z prawdopodobieństwem, a nie w oparciu o wartość  $\tau$ ?

## 2. ACO i TSP (6)(wybór miasta)

Wybór następuje zgodnie z określonym prawdopodobieństwem.

**Pytanie 10.** Dlaczego z prawdopodobieństwem, a nie w oparciu o wartość  $\tau$ ?

- dlatego, że początkowo ilość feromonu na każdej krawędzi jest identyczna co wymusza istnienie dodatkowego kryterium - np. prawdopodobieństwa ☺,
- prowadziłyby to do wyboru zachłannego, a to jak wiemy, nie daje w efekcie najkrótszej trasy.

**Pytanie 11.** Jak zatem zdefiniowane jest to prawdopodobieństwo?

## 2. ACO i TSP (6)(wybór miasta)

Prawdopodobieństwo wyboru miasta  $j$  przez  $k$ -tą mrówkę w mieście  $i$  dane jest wzorem:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{(\tau_{ij})^\alpha (\eta_{ij})^\beta}{\sum_{c_{i,l} \in \Omega} (\tau_{ic})^\alpha (\tau_{ic})^\beta} & \forall c_{i,l} \in \Omega \\ 0 & \forall c_{i,l} \notin \Omega \end{cases}$$

gdzie:

$\mathbf{c}$  - kolejne możliwe (nie znajdujące się na liście  $tabu_k$  miasto),

$\Omega$  - dopuszczalne rozwiązanie (nieodwiedzone miasta, nienależące do  $tabu_k$ ),

$\eta_{ij}$  -wartość lokalnej funkcji kryterium; np.  $\eta = \frac{1}{d_{ij}}$  (*visibility*), czyli odwrotność odległości pomiędzy miastami,

$\alpha$  - parametr regulujący wpływ  $\tau_{ij}$ ,

$\beta$  - parametr regulujący wpływ  $\eta_{ij}$ .

## 2. ACO i TSP (7)(rodzaje AS - *Ant Systems*)

Wyróżniamy trzy rodzaje (wg Dorigo) algorytmów w systemie mrówkowym.

- Algorytm Gęstościowy (*ang. ant-density DAS*)
- Algorytm Ilościowy (*ang. ant-quantity QAS*)
- Algorytm Cykliczny (*ang. ant-cycle CAS*)

Kluczami różnicującymi są:

- sposób wyliczania  $\Delta\tau_{ij}^k(t, t + 1)$  oraz
- moment uaktualnienia  $\tau_{ij}$

## 2. ACO i TSP (8)(DAS)(1)(aktualizacja feromonu)

W DAS przy przejściu po krawędzi  $(i, j)$ , na każdą jednostkę jej długości rozkładana jest stała ilość feromonu  $Q_{Dens}$ .

$$\Delta\tau_{ij}^k(t, t + 1) = \begin{cases} Q_{Dens} & \text{jeżeli } k\text{-ta mrówka przechodzi z } i \text{ do } j \text{ w jednostce czasu} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Ilość feromonu na jednostkę długości jest zawsze stała; niezależna od długości krawędzi



## 2. ACO i TSP (9)(DAS)(2)(opis algorytmu)

- Mrówki rozmieszczane są w różnych miastach.

## 2. ACO i TSP (9)(DAS)(2)(opis algorytmu)

- Mrówki rozmieszczane są w różnych miastach.
- Określana jest początkowa ilość feromonu w wierzchołkach (miastach).

## 2. ACO i TSP (9)(DAS)(2)(opis algorytmu)

- Mrówki rozmieszczane są w różnych miastach.
- Określana jest początkowa ilość feromonu w wierzchołkach (miastach).
- Do  $tabu_k$  dołączane są miasta startowe dla każdej z  $k$  mrówek.

## 2. ACO i TSP (9)(DAS)(2)(opis algorytmu)

- Mrówki rozmieszczane są w różnych miastach.
- Określana jest początkowa ilość feromonu w wierzchołkach (miastach).
- Do  $tabu_k$  dołączane są miasta startowe dla każdej z  $k$  mrówek.
- Mrówki wybierają kolejne miasto ( $j$ ) na podstawie  $p_{ij}$ , gdzie:
  - $\alpha$  określa wpływ doświadczeń poprzednich pokoleń; wybór dokonywany jest na podstawie wartości  $\tau_{ij}$  - ilość informacji o liczbie wyborów określonej trasy przez inne osobniki.
  - $\beta$  określa siłę wyboru zachłannego drogi na podstawie odległości pomiędzy miastami; wybór dokonywany jest na podstawie wartości  $\eta_{ij}$  - stopień widoczności miasta  $j$  z miasta  $i$ .

## 2. ACO i TSP (9)(DAS)(2)(opis algorytmu)

- Mrówki rozmieszczane są w różnych miastach.
- Określana jest początkowa ilość feromonu w wierzchołkach (miastach).
- Do  $tabu_k$  dołączane są miasta startowe dla każdej  $k$  mrówek.
- Mrówki wybierają kolejne miasto ( $j$ ) na podstawie  $p_{ij}$ , gdzie:
  - $\alpha$  określa wpływ doświadczeń poprzednich pokoleń; wybór dokonywany jest na podstawie wartości  $\tau_{ij}$  - ilość informacji o liczbie wyborów określonej trasy przez inne osobniki.
  - $\beta$  określa siłę wyboru zachłannego drogi na podstawie odległości pomiędzy miastami; wybór dokonywany jest na podstawie wartości  $\eta_{ij}$  - stopień widoczności miasta  $j$  z miasta  $i$ .
- ...

**Pytanie 12.** Jak działają mrówki dla  $\alpha = 0$ ?

## 2. ACO i TSP (10)(DAS)(3)(opis algorytmu)

- ...
- Każde przejście mrówki po krawędzi  $(i, j)$  powoduje pozostawienie feromonu; ilość feromonu na krawędzi zwiększa się.

## 2. ACO i TSP (10)(DAS)(3)(opis algorytmu)

- ...
- Każde przejście mrówki po krawędzi  $(i, j)$  powoduje pozostawienie feromonu; ilość feromonu na krawędzi zwiększa się.
- Część feromonu jest odparowywana z krawędzi po wykonaniu ruchu przez wszystkie mrówki zgodnie z  $\tau_{ij}(t+1) = \rho \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t, t+1)$ .

## 2. ACO i TSP (10)(DAS)(3)(opis algorytmu)

- ...
- Każde przejście mrówki po krawędzi  $(i, j)$  powoduje pozostawienie feromonu; ilość feromonu na krawędzi zwiększa się.
- Część feromonu jest odparowywana z krawędzi po wykonaniu ruchu przez wszystkie mrówki zgodnie z  $\tau_{ij}(t+1) = \rho \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t, t+1)$ .
- Listy  $tabu_k$  są kompletne (wypełnione) po  $n - 1$  ruchach.



## 2. ACO i TSP (10)(DAS)(3)(opis algorytmu)

- ...
- Każde przejście mrówki po krawędzi  $(i, j)$  powoduje pozostawienie feromonu; ilość feromonu na krawędzi zwiększa się.
- Część feromonu jest odparowywana z krawędzi po wykonaniu ruchu przez wszystkie mrówki zgodnie z  $\tau_{ij}(t+1) = \rho \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t, t+1)$ .
- Listy  $tabu_k$  są kompletne (wypełnione) po  $n - 1$  ruchach.
- Obliczane są trasy znalezione przez mrówki a zapamiętywana jest najkrótsza.

## 2. ACO i TSP (10)(DAS)(3)(opis algorytmu)

- ...
- Każde przejście mrówki po krawędzi  $(i, j)$  powoduje pozostawienie feromonu; ilość feromonu na krawędzi zwiększa się.
- Część feromonu jest odparowywana z krawędzi po wykonaniu ruchu przez wszystkie mrówki zgodnie z  $\tau_{ij}(t+1) = \rho \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t, t+1)$ .
- Listy  $tabu_k$  są kompletne (wypełnione) po  $n - 1$  ruchach.
- Obliczane są trasy znalezione przez mrówki a zapamiętywana jest najkrótsza.
- Listy tabu są zerowane.

## 2. ACO i TSP (10)(DAS)(3)(opis algorytmu)

- ...
- Każde przejście mrówki po krawędzi  $(i, j)$  powoduje pozostawienie feromonu; ilość feromonu na krawędzi zwiększa się.
- Część feromonu jest odparowywana z krawędzi po wykonaniu ruchu przez wszystkie mrówki zgodnie z  $\tau_{ij}(t+1) = \rho \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t, t+1)$ .
- Listy  $tabu_k$  są kompletne (wypełnione) po  $n - 1$  ruchach.
- Obliczane są trasy znalezione przez mrówki a zapamiętywana jest najkrótsza.
- Listy tabu są zerowane.

**Pytanie 13.** Jaki jest warunek zakończenia?

## 2. ACO i TSP (11)(DAS)(4)(opis algorytmu)

Warunkiem zatrzymania procesu jest wykonanie  $CC$  iteracji (określone przez użytkownika) bądź wystąpi przypadek nazywany *uni-path behavior*, czyli ustalenie się tej samej trasy wybranej przez wszystkie  $m$  mrówek.

## 2. ACO i TSP (12)(QAS)(1)(aktualizacja feromonu)

W QAS przy przejściu po krawędzi  $(i, j)$ , stała ilość feromonu  $Q_{Quan}$  dzielona jest przez długość krawędzi  $d_{ij}$ .

## 2. ACO i TSP (12)(QAS)(1)(aktualizacja feromonu)

W QAS przy przejściu po krawędzi  $(i, j)$ , stała ilość feromonu  $Q_{Quan}$  dzielona jest przez długość krawędzi  $d_{ij}$ .

$$\Delta\tau_{ij}^k(t, t + 1) = \begin{cases} \frac{Q_{Quan}}{d_{ij}} & \text{jeżeli } k\text{-ta mrówka przechodzi z } i \text{ do } j \text{ w jednostce czasu} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

## 2. ACO i TSP (12)(QAS)(1)(aktualizacja feromonu)

W QAS przy przejściu po krawędzi  $(i, j)$ , stała ilość feromonu  $Q_{Quan}$  dzielona jest przez długość krawędzi  $d_{ij}$ .

$$\Delta\tau_{ij}^k(t, t + 1) = \begin{cases} \frac{Q_{Quan}}{d_{ij}} & \text{jeżeli } k\text{-ta mrówka przechodzi z } i \text{ do } j \text{ w jednostce czasu} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

**Pytanie 14.** Które krawędzie wybierane są chętniej przez mrówki w modelu QAS?

## 2. ACO i TSP (13)(CAS)(1)(aktualizacja feromonu)

W CAS stała ilość feromonu  $Q_{Cycl}$  dzielona jest przez długość trasy  $L$  znalezionej przez  $k$ -tą mrówkę -  $L^k$ .

$$\Delta\tau_{ij}^k(t, t + 1) = \begin{cases} \frac{Q_{Cycl}}{L^k} & \text{jeżeli } k\text{-ta mrówka przeszła z } i \text{ do } j \text{ na swojej trasie} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$



## 2. ACO i TSP (14)(CAS)(2)(aktualizacja feromonu)

Wartość feromonu aktualizowana jest po  $n$  krokach wg wzoru:

$$\tau_{ij}(t+n) = \rho_1 \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t, t+n),$$

gdzie

$$\Delta\tau(t, t+n) = \sum_m^{k=1} \Delta\tau_{ij}^k(t, t+n)$$

2. ACO i TSP (15)(złożoność algorytmu)

**Pytanie 15.** Jaka jest złożoność algorytmu cyklicznego?

2. ACO i TSP (15)(złożoność algorytmu)

$$O(CC \cdot n^2 \cdot m)$$

Ale ...

## 2. ACO i TSP (15)(złożoność algorytmu)

$$O(CC \cdot n^2 \cdot m)$$

Dorigo i jego ludzie znaleźli liniową zależność pomiędzy liczbą mrówek a liczbą miast.

Stąd można przyjąć, że złożoność obliczeniowa wynosi

$$O(CC \cdot n^3).$$

$CC$  - liczba iteracji (cykli)

## 2. ACO i TSP (15)(zalecane wartości parametrów)

Dorigo (na podstawie doświadczeń - miejmy nadzieję ☺) zaleca przyjęcie następujących wartości parametrów:

- $\alpha = 1$ ,
- $\beta$  od 2 do 5,
- $\rho = 0.5$ ,
- $m = n$  ( $m$  - liczba mrówek,  $n$  - liczba miast)
- $\tau_0 = \frac{m}{C^{nn}}$ , gdzie  $C^{nn}$  jest szacowaną długością trasy